MATHEMATIQUES 2

Options M et P

Durée : 4 heures

L'épreuve comporte deux problèmes indépendants.

Note importante : Toute copie illisible ou mal présentée sera pénalisée. Les résultats demandés seront soigneusement encadrés et mis en évidence, et les démonstrations seront étayées par des références précises à des théorèmes du cours.

1er PROBLEME

Première partie

1 - Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (1) dont l'inconnue est le triplet (x, y, z) :

(1) $xy = z \ ; \ yz = x \ ; \ zx = y.$

2 - E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension n non nulle et $\mathcal{L}$ (E) est l'ensemble des endomorphismes de E.

A tout réel k , on associe le sous-ensemble U_k de l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ (E) défini par :

(2) $u \in U_k$ si et seulement si $u^2 = ke$, où e désigne l'identité sur E et u^2 l'endomorphisme $u \circ u$.

Montrer que U_{-1} est l'ensemble vide lorsque n est un nombre impair.

3 - Montrer, u et v étant deux éléments de $\mathcal{L}$ (E), que si $u \circ v = v \circ u$, alors tout sous-espace propre pour l'un est stable pour l'autre.

Deuxième partie

On se propose de résoudre dans certains cas particuliers le système (S), donné par :

(S) : $u \circ v = w \ ; \ v \circ w = u \ ; \ w \circ u = v$

dont l'inconnue est le triplet (u, v, w) élément de $\mathcal{L}(E)^3$.

1 - Soient u et v deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe w tel que (u, v, w) vérifie S est :

(3) $v \circ u \circ v = u$ et $u \circ v \circ u = v$.

2 - Montrer que les conditions suivantes sont nécessaires pour qu'il exixte w tel que (u, v, w) vérifie S :

a - $u^2 = v^2$

b - $u^5 = u$

c - $u (u^2 - e) (u^2 + e) = 0$

3 - En déduire que la seule solution de S vérifiant $u^2 = 0$ est la solution banale (0, 0, 0).

4 - Soient u et v deux éléments de U_1.

Montrer que u et v sont diagonalisables.

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe w tel que (u, v, w) vérifie S est :

(4) $u \circ v = v \circ u$.

Recherche des solutions de S vérifiant : $u \in U_1$.

Soit u élément de U_1.

a - Dans l'hypothèse où $u \in \{ e, -e \}$ préciser l'ensemble des triplets (u, v, w) vérifiant S.

b - Dans l'hypothèse où $u \notin \{ e, -e \}$ on choisit une base de E sur laquelle la matrice de u est :

$$J = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$$

où p et q vérifient $p > 0$, $q > 0$, $p + q = n$, et où I_p désigne la matrice unité ayant p colonnes.

Caractériser alors les triplets de matrices (J, V, W) associés dans cette base aux solutions de (S) vérifiant $u^2 = e$.

5 - Soient maintenant u et v deux éléments de U_{-1}. On suppose donc que n est pair et on pose $n = 2p$.

a - Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe w tel que (u, v, w) vérifie S est :

(5) $u \circ v = -v \circ u$.

b - Montrer d'autre part qu'il existe une base B de E pour laquelle la matrice de u est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{bmatrix}$$

On pourra, par exemple, démontrer par récurrence la proposition (P_p) :

"Il existe p vecteurs $x_1, ..., x_p$ de E tels que le système $(x_1, ..., x_p, u(x_1), ..., u(x_p))$ soit libre".

Recherche des solutions de S vérifiant : $u \in U_{-1}$.

u étant choisi dans U_{-1} et E rapporté à une base B dans laquelle la matrice de U est A, trouver une condition nécessaire et suffisante que doit vérifier la matrice V associée à v sur la base B, pour que : $\begin{cases} v \in U_{-1} \\ \text{et} \\ u \circ v = -v \circ u. \end{cases}$

En déduire que, pour n = 2, il n'existe pas de solution de S vérifiant $u^2 = -e$.

Donner un triplet (A, V, W) de matrices associées dans la base B à une solution (u, v, w) de S dans le cas où n = 4.

2ème PROBLEME

Soit a un nombre réel donné. Σ_a est un système de deux équations dont les inconnues sont les fonctions u et v de classe C_1 sur $\mathbb{R}$, donné par :

$$(\Sigma_a) \begin{cases} u^2 + v^2 = (1+t^2)^a \\ u'^2 + v'^2 = a^2 (1+t^2)^{a-1} \end{cases}$$

Notations utilisées

- Une fonction de classe C_p sur un intervalle I est une fonction dérivable p fois, sa pème dérivée étant continue. Une fonction de classe C_∞ sur un intervalle I est une fonction admettant des dérivées de tous ordres.

- Si g est une fonction numérique, g', g", ..., $g^{(n)}$ représentent ses éventuelles dérivées d'ordre 1, 2, ..., n.

- S_a est l'ensemble des couples solutions de Σ_a.

- Un plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A tout élément (u, v) de S_a, on associe la courbe de P dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

F_a est la famille des courbes ainsi définies.

Première partie

1 - Montrer que F_a est stable par la symétrie orthogonale d'axe $(O, \vec{i})$, par toute rotation de centre O et, donc, par toute symétrie orthogonale dont l'axe passe par O.

2 - Déterminer S_0 et F_0.

Dans la suite, on supposera a non nul, et on considèrera un élément (u, v) de Σ_a.

3 - On note r la fonction $\sqrt{u^2 + v^2}$. Montrer qu'elle est de classe C_∞ sur $\mathbb{R}$. En déduire que les fonctions $\frac{u}{r}$ et $\frac{v}{r}$ sont de classe C_1 sur $\mathbb{R}$.

4 - On admettra qu'il existe une fonction θ, définie sur $\mathbb{R}$, de classe C_1, et vérifiant

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \\ \theta(0) \in]-\pi, \pi] \end{cases}$$

Déterminer alors deux relations entre r, θ' et t formant un système Σ'_a équivalent à Σ_a.

En déduire la fonction θ en précisant avec soin l'image de $\mathbb{R}$ par θ, puis l'ensemble S_a des solutions de Σ_a.

Deuxième partie

1 - Prouver l'existence et l'unicité d'une solution (u_a, v_a) de Σ_a vérifiant :

$$u_a(0) > 0 \ , \ v_a(0) = 0 \ , \ a.v'_a(0) > 0 \ .$$

On appelera C(a) la courbe associée à cette solution particulière. On rappellera comment les autres courbes de la famille F_a s'en déduisent.
Donner une équation polaire de la courbe C(a).

2 - Dire pour quelles valeurs de a la courbe C(a) admet des branches infinies et, éventuellement, des asymptotes que l'on déterminera effectivement.

3 - Construire C(1) , C(-1) , C(2) , C(-2) et $C(\frac{1}{2})$.
Dans chacun des cas, vérifier la compatibilité du résultat avec ceux de la question II- 2-.
Toute construction de courbe doit être justifiée, soit par l'identification de la nature de la courbe, soit par un tableau d'étude de r ou de (u, v).

Troisième partie

1 - Montrer que, quel que soit a :

$$u'_a = -a\, v_{a-1} \text{ et } v'_a = a\, u_{a-1}.$$

2 - Calculer $(u_a^{(n)} , v_a^{(n)})$ en fonction de (u_{a-n} , v_{a-n}).
Que peut-on en déduire pour les fonctions u_a et v_a lorsque a est un entier strictement positif ?

3 - Déduire de ce qui précède que les fonctions u et v telles que $(u, v) \in S_a$ sont, quel que soit a, de classe C_∞, et admettent en 0 un développement en série entière, dont on calculera le rayon de convergence. Donner les coefficients de ce développement pour les fonctions u_a et v_a. On pourra noter Γa^n les nombres

$$\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}.$$

4 - On suppose ici que a est un entier strictement négatif. Exprimer les coefficients des séries obtenues en 3- à l'aide de coefficients binomiaux.